Internetová matematická olympiáda

12. ročník, 26. 11. 2019

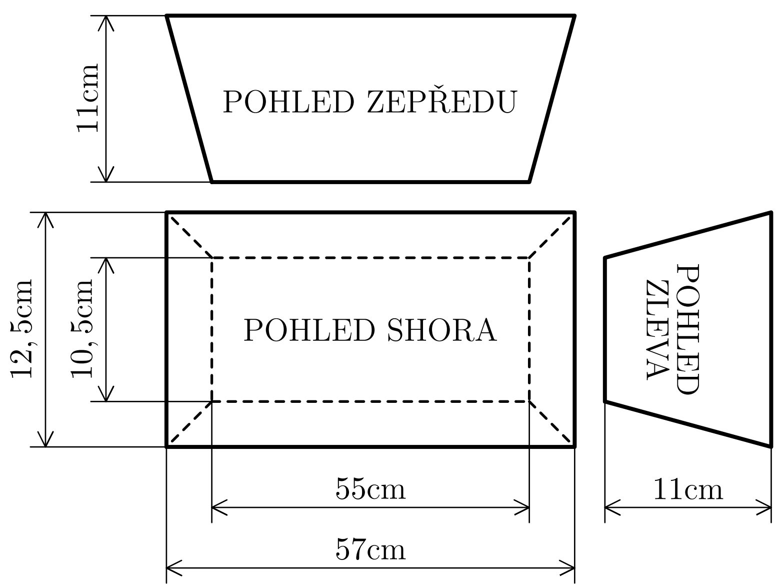
www.matholymp.fme.vutbr.cz

1. Potřebujeme nachystat 8 truhlíků pro vysazení balkónových květin. Tvar a rozměry truhlíku jsou uvedeny na obrázku 1. Truhlíky chceme naplnit substrátem právě 2 cm pod horní okraj.

   a) Kolik substrátu v cm^3 zaokrouhlených na celá čísla budeme potřebovat?

   b) Jaký je nejmenší počet 20litrových balení substrátu, který k tomu budeme potřebovat?

   c) Bude finančně výhodnější koupit odpovídající počet 20litrových substrátů á 77 Kč, nebo odpovídající počet 40litrových substrátů á 112 Kč?



Obrázek 1: Schématický náčrt tvaru truhlíku a jeho rozměry (k zadání příkladu 1)

2. Nalezněte všechny dvojice **po sobě jdoucích** trojciferných čísel $m, n \in \mathbb{N}$ takových, že každé z nich je rovno součtu třetích mocnin svých cifer.

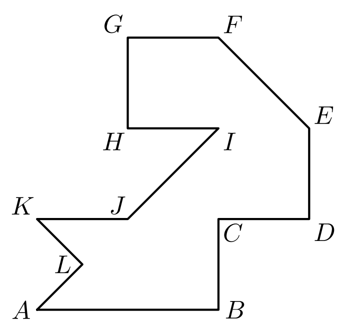
   Poznámka: Přirozené trojciferné číslo k, kterého zápis v desítkové soustavě je ve tvaru ABC, kde A, B, C jsou jeho cifry, je rovno součtu třetích mocnin svých cifer, pokud $k = A^3 + B^3 + C^3$.

3. Ve třídě je x žáků. Právě jeden z nich se jmenuje Martin a právě jeden je Radek. Chceme náhodně vybrat 6 žáků z této třídy, kteří získají vstupenku na koncert. Označme jako $P(M)$ pravděpodobnost jevu, že ve vybrané šestici bude Martin, ale ne Radek. Označme jako $P(MR)$ pravděpodobnost jevu, že ve vybrané šestici bude Martin a Radek. Víme, že platí $P(M) = 5P(MR)$. Určete počet žáků ve třídě.

4. Mějme čtverec $KLMN$ se stranou délky 1 cm. Nalezněte všechny způsoby, jak lze rozdělit tento čtverec úsečkou na dvě části tak, že jejich obsahy budou v poměru 1:3 a délka úsečky bude nejmenší možná.

5. Uvažujme funkci f danou předpisem $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Zapište funkci g dvou proměnných, která splňuje vztah
$$g(x \cdot y, y) = y^2 \cdot f(x). \tag{1}$$
(V tomto vztahu hodnotu $f(x)$ násobíme hodnotou y^2, do funkce g dosazujeme za první proměnnou součin $x \cdot y$ a za druhou proměnnou y.)

6. a) Jaký největší počet pravých úhlů může mít dvanáctiúhelník? Načrtněte dvanáctiúhelník s největším možným počtem pravých úhlů a ukažte, že žádný jiný dvanáctiúhelník nemůže mít víc pravých úhlů. Pravým úhlem se myslí to, že vnitřní úhel u daného vrcholu má 90°. Například dvanáctiúhelník $ABCDEFGHIJKL$ na obrázku 2 má pravý úhel u vrcholu B, D, G a H.
b) Jaký největší počet „levých úhlů“ může mít dvanáctiúhelník? Načrtněte dvanáctiúhelník s největším možným počtem levých úhlů a ukažte, že žádný jiný dvanáctiúhelník nemůže mít víc levých úhlů. Levým úhlem se myslí to, že vnitřní úhel u daného vrcholu má 270°. Například dvanáctiúhelník $ABCDEFGHIJKL$ na obrázku 2 má levý úhel u vrcholu C a L.



Obrázek 2: Příklad 12-úhelníku

7. Igor si kreslí paraboly. Nejprve si zvolí nějaké nezáporné reálné číslo t. Vypočte hodnoty
$$b = -2t\cos(t), \quad c = t\sin(t) + t^2\cos^2(t),$$
pak nakreslí graf paraboly dané rovnicí $y = x^2 + bx + c$ a vrchol paraboly označí křížkem. Pak si zvolí nové t a pokračuje ... Všechny paraboly kreslí do jednoho obrázku.

Jeho spolužák Oliver si všiml, že všechny křížky (tj. vrcholy parabol) leží na zajímavé křivce a odvodil parametrické vyjádření této křivky.

a) Jaké je parametrické vyjáření této křivky?

b) Některé z Igorových parabol mají svůj vrchol na ose x. Jaké t v tomto případě Igor mohl zvolit? Zapište všechny možnosti.

c) Některé z Igorových parabol mají svůj vrchol na ose y. Jaké t v tomto případě Igor mohl zvolit? Zapište všechny možnosti.

8. Uvažujme body H, M, S, které představují konce stejně dlouhých ručiček nástěnných hodin. H je na konci hodinové, M minutové, S sekundové ručičky. Spočtěte s přesností na sekundy, kolik je hodin, jestliže víte, že $|\sphericalangle SMH| = 78°$, $|\sphericalangle MSH| = 66°$, $|\sphericalangle SHM| = 36°$ a úsečka MS je vodorovná. Dále víte, že hledaný čas je v rozmezí 00:00:00 a 03:00:00 hodin.

9. Určete, jaká je nejmenší kladná hodnota výrazu $36^a - 5^b$, kde $a, b \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Ukažte, že se jedná opravdu o nejmenší možnou kladnou hodnotu tohoto výrazu.

10. Mějme na záclonové tyči $n \geq 3$ háčků, na které chceme zavěsit záclonu následujícím postupem:
1) Na vnější háčky zavěsíme okraje záclony. Záclona je tedy pevně uchycená na krajích a uprostřed je prověšená.
2) Volné háčky mezi dvěma pevně uchycenými místy rozdělíme na 2 stejně početné skupiny háčků a na jeden zbývající háček uprostřed, který odděluje obě skupiny. Na tento háček zavěsíme střed prověšené části záclony.
3) Postupem 2) pokračujeme, dokud nevyužijeme všech n háčků.
Přípustné počty háčků, pro které bude fungovat uvedený princip zavěšování záclon, tvoří posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, seřazenou vzestupně od nejmenšího počtu.
Zapište tuto posloupnost vzorcem pro $k-$tý člen posloupnosti. To znamená, že pomocí tohoto vzorce půjde vypočítat a_k bez nutnosti znát předchozí členy posloupnosti.

Zadání příkladů pro vás připravují studenti oboru Matematické inženýrství a doktorského studijního programu Aplikovaná matematika na Fakultě strojního inženýrství VUT v Brně.